Ejercicios de reparto proporcional 2o eso

TEMA 5: PROPORCIONALIDAD Y TEMA 6: PROBLEMAS Razón: Una razón es la división de dos cantidades y se representa en forma de fracción. Al numerador se le llama antecedente y al denominador, consecuente. (Nota: En una razón, tanto el antecedente como el consecuente pueden ser decimales; sin embargo, en una fracción tanto el numerador como el denominador son enteros). Proporción: es la igualdad de dos razones. (Lectura: 6 es a 3 como 4 es a 2). Propiedades de las proporciones: a) Producto de medios igual a producto de extremos (propiedad fundamental). b) En una proporción, la suma de los antecedentes entre la suma de los consecuentes forma otra razón que está en proporción con las anteriores razones. [Otras propiedades de las proporciones: c) Si cambiamos de lugar los extremos (el cuarto término lo colocamos el primero y el primero lo colocamos en el cuarto lugar) obtenemos otra proporción. d) Si cambiamos de lugar los medios (el segundo término lo colocamos el tercero, y el tercero lo colocamos el segundo) obtenemos otra proporción. e) Si invertimos los antecedentes y los consecuentes de una proporción, obtenemos otra proporción. f) Si a cada antecedente le sumamos o restamos su consecuente, obtenemos otra proporción. g) Si a cada consecuente le sumamos o restamos su antecedente, obtenemos otra proporción.] Cuarto proporcional: De los cuatro términos de una proporción, si se desconoce uno de ellos se le llama cuarto proporcional. Para calcular el cuarto proporcional se utiliza la propiedad fundamental de las proporciones: 4 • x = 12 • 6. Para saber qué número multiplicado por 4 me da 72 tengo que dividir 72 entre 4. Por lo tanto: Proporción continua: La que tiene sus medios o sus extremos iguales. Medio proporcional: Es el término igual de una proporción continua. Para calcular el medio proporcional se utiliza la propiedad fundamental de las proporciones: [A la proporción que tiene los cuatro términos distintos se le suele llamar proporción discreta] Magnitudes directamente proporcionales: Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar o disminuir una, la otra aumenta o disminuye en la misma proporción. Ej.: Las manzanas y el coste de las mismas. Si aumentamos el peso de las manzanas, aumenta también el valor de las mismas. Podemos construir una tabla de valores: La relación que hay entre los elementos de una magnitud y los de la otra se llama razón de proporcionalidad y se indica mediante un cociente: r = 2/3. [Quiere decir que si de una magnitud hay 2 unidades, de la otra hay 3. Ejemplo: Si en una clase de 60 alumnos, 40 son de Madrid, los alumnos madrileños están a razón de 2 a 3, es decir, de 2/3 (40/60 = 2/3)]. Los cocientes entre los elementos de una magnitud y los de la otra son iguales, por lo que forman una proporción y el valor de la razón de proporcionalidad se llama constante de proporcionalidad. REGLA DE TRES Hay tres datos conocidos y uno desconocido que hay que hallar. Hay dos magnitudes relacionadas y directamente proporcionales (p. ej., peso y precio). De una se conocen dos datos y de la otra se conoce uno y se pregunta el otro. Los datos se colocan formando proporción y se trata de hallar el cuarto proporcional. Problema de ejemplo: Si 4 kg de peras cuestan 7,2 €, ¿cuánto cuestan 7 kg? PESO PRECIO 4 kg 7,2 € 7 kg x € Otro ejemplo: Si 4 kg de naranjas cuestan 8 €, ¿cuántos kg puedo comprar con 14 €? PESO PRECIO 4 kg 8 € x kg 14 € Magnitudes inversamente proporcionales: Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una disminuye la otra o cuando al disminuir una aumenta la otra. Ej.: Nº de personas y nº de días que les dura una caja de peras: si aumentamos el número de personas, disminuye el número de días. Podemos construir una tabla de valores: La constante de proporcionalidad inversa es el producto de los elementos de una magnitud por los de la otra. Este producto ha de ser siempre igual. Regla de tres inversa: Para calcular la regla de tres inversa se colocan los datos igual que en la directa, pero, al formar la proporción, una de las razones se invierte, siendo aconsejable invertir aquélla en la que no esté la incógnita. Problema de ejemplo: Seis albañiles tardan 8 meses en realizar una obra. ¿Cuánto tardarían 2 albañiles? (Nota: Es aconsejable escribir una I mayúscula, de Inversa, entre las dos magnitudes relacionadas y rodearla con un círculo de color rojo) ALBAÑILES (I) TIEMPO 6 8 meses 2 x meses Otro ejemplo: Un grifo echa 3 litros de agua por minuto y tarda 5 minutos en llenar un cubo. ¿Cuánto tardaría en llenar ese mismo cubo si vertiera 5 litros por minuto? (Es fácil comprender que si sale más agua del grifo el cubo tardará menos en llenarse, luego se trata de una regla de tres inversa, porque cuando aumenta una magnitud la otra disminuye). LITROS (I) TIEMPO 3 litros 5 min 5 litros x Regla de tres compuesta: Se llama regla de tres compuesta cuando intervienen más de dos magnitudes y hay que hallar un dato de alguna de ellas. Para formar la proporción hay que proceder como si sólo hubiera dos magnitudes: una la de la incógnita y la otra la forman las demás, multiplicando sus razones de proporcionalidad. Si alguna de las magnitudes es inversa con respecto a la incógnita habrá que poner su razón inversa. Ejemplo: Para mantener 6 caballos durante 20 días se necesitan 1.100 kg de heno. ¿Cuántos caballos se alimentarán con 4.950 kg durante 60 días? (I) CABALLOS DÍAS HENO 6 20 1100 x 60 4950 [Para saber cuál de las magnitudes es inversa o directa nos podemos preguntar cómo se comporta cada una con respecto a la magnitud que tiene la incógnita. Así, por ejemplo, en este problema nos podemos preguntar: Si el número de caballos aumenta (magnitud donde está la incógnita), ¿tendrán comida para más días o para menos días? Es evidente que con la misma cantidad de comida tendrán para menos días si el número de caballos aumenta, luego la magnitud Días es inversa con respecto a la magnitud número de Caballos. Una pregunta similar nos formularemos para saber cómo es la otra magnitud: Si aumenta el número de caballos, ¿tendrá que aumentar la comida? Es evidente que sí, por lo que la magnitud cantidad de Heno es directa con respecto a la magnitud número de Caballos] [Fíjate en que no es necesario realizar las operaciones intermedias, porque estos ejercicios suelen ser muy apropiados para simplificar fracciones, con lo que se evitan operaciones tediosas con números elevados. En efecto, la fracción final tiene una fácil simplificación, sin necesidad de enredarse en multiplicaciones y divisiones. Así, dividimos por 100 en el numerador y en el denominador, con lo que nos queda 6 • 2 • 495 en el numerador y 6 • 110 en el denominador. Ahora dividimos por 6 en ambos términos, con lo que nos queda: 2 • 495 en el numerador y 110 en el denominador. Si simplificamos por 2 llegamos a 495 entre 55. Ahora, a simple vista, se observa que se puede simplificar por 5 y nos queda 99 en el numerador y 11 en el denominador. El resultado final ya es inmediato: 99 entre 11 da 9] Porcentajes: El porcentaje significa cuántas partes corresponden a 100 unidades de algo. Hallar el porcentaje de una cantidad es calcular cuántas partes le corresponden a esa cantidad sabiendo que si la cantidad fuera 100 le correspondería el porcentaje indicado. Así, por ejemplo, hallar el 8 % de 420, es calcular cuántas partes hay que tomar de 420, sabiendo que si hubiera 100 tomaríamos 8. Cálculo de porcentajes: a) El porcentaje como fracción: Para calcular el porcentaje de algo se opera como si fuera la fracción centésima de ese algo. b) El porcentaje como regla de tres: Si consideramos el porcentaje como una regla de tres, ponemos dos columnas y dos filas y colocamos en el lugar apropiado los datos que nos den, teniendo en cuenta que una de las filas necesariamente ha de estar ocupada por los datos del porcentaje. (Así, si hablamos del 6 %, en una columna irá el 6 y en otra irá el 100, pero ambos, el 6 y el 100, irán en la misma fila. Si lo que me preguntaran fuera el tanto por ciento, en una columna pondríamos x y en la otra 100, pero ambos, x y 100, irían en la misma fila). Ejemplo 1: Al comprar un frigorífico de 350 € me descuentan el 6%. ¿Cuánto me descuentan? PRECIO DESCUENTO (Interpretación) 100 6 (Si costara 100 €, me descontarían 6 €) 350 x (Como cuesta 350 €, me descontarán x) Ejemplo 2: En una clase de 24 alumnos han aprobado el control de matemáticas 18 alumnos. ¿Qué % ha aprobado y qué % ha suspendido? ALUMNOS APROBADOS (Interpretación) 24 18 (De 24 alumnos aprueban 18) 100 x (De 100 alumnos aprobarán x) [Resolución por ecuaciones: Ejemplo 3 (Calcular una cantidad conociendo el porcentaje): En una clase hay 4 alumnos segovianos, lo que supone el 16 % del total. ¿Cuántos alumnos hay en esa clase? TOTAL SEGOVIANOS (Interpretación) 100 16 (Si fueran 100 alumnos, 16 serían segovianos) x 4 (El total es x y los segovianos son 4) [Resolución por ecuaciones: Aumentos porcentuales: Ejemplo: Un frigorífico de 430 € lo han subido el 10 %. ¿Cuánto cuesta ahora? a) Resolución por fracciones: Se calcula el porcentaje de aumento y se suma a la cantidad inicial: b) Resolución por regla de tres (Si algo aumenta el 10 % quiere decir que si costaba 100 ahora costará 110): Antes Ahora (Interpretación) 430 x (Lo que antes costaba 430 €, ahora cuesta x €) 100 110 (Lo que antes costaba 100, al subir el 10 % costará 110) c) Resolución por ecuaciones: Se plantea la ecuación según los datos que nos hayan dado. Otro ejemplo: Un frigorífico me ha costado 424 € después de haber subido el 6 %. ¿Cuánto costaba antes de la subida? a) Resolución por regla de tres: Antes Ahora (Interpretación) x 424 (Lo que ahora cuesta 424 €, antes costaba x €) 100 106 (Lo que antes costaba 100 €, si sube el 6 % cuesta 106 €) b) Resolución por ecuaciones: Disminuciones porcentuales: Ejemplo: Un frigorífico de 430 € lo han rebajado el 10 %. ¿Cuánto cuesta ahora? a) Resolución por fracciones: Se calcula el porcentaje de descuento y se resta a la cantidad inicial: b) Resolución por regla de tres (Si algo disminuye el 10 % quiere decir que si costaba 100 ahora costará 90): Antes Ahora (Interpretación) 430 x (Lo que antes costaba 430 €, ahora costará x €) 100 90 (Lo que antes costaba 100 €, al bajar el 10 % costará 90 €) c) Resolución por ecuaciones: Otro ejemplo: Un frigorífico me ha costado 380 € después de haber bajado el 5 %. ¿Cuánto costaba antes de la rebaja? a) Resolución por regla de tres: Antes Ahora (Interpretación) x 380 (Lo que ahora cuesta 380 €, no sé lo que costaba antes) 100 95 (Lo que antes costaba 100 €, al bajar el 5 % costará 95 €) b) Resolución por ecuaciones: [Porcentajes con la calculadora: Para calcular porcentajes existe una tecla específica en la calculadora, pero se pueden calcular directamente de la siguiente manera: a) Porcentajes: Se multiplica la cantidad por la fracción centésima del tanto por ciento. 3 % de 40 = 40 • 0,03 = 1,2 b) Aumentos y disminuciones porcentuales: Se multiplica la cantidad por 1 más (aumentos) o menos (disminuciones) la fracción centésima del tanto por ciento. ¿Cuánto cuesta un móvil de 60 € que lo han subido un 5 %? 60 • 1,05 = 63 €. ¿Cuánto cuesta un móvil de 60 € que lo han rebajado un 5 %? 60 • 0,95 = 57 €.] Interés: Dinero que dan los bancos en compensación por tener depositados en ellos tus ahorros. I = Interés (dinero que da el banco al final de un tiempo) C = Capital (dinero que se deposita en el banco) r = rédito (dinero, en forma de porcentaje, que da el banco durante un año. En lenguaje ordinario se le llama interés) t = tiempo (en años). Ejemplo: ¿Qué interés (I) me producen 50000 € (C) colocados a un 8 % (r) durante 5 años (t)? Resolvemos este problema por una regla de tres compuesta: INTERÉS CAPITAL TIEMPO (Interpretación) 8 100 1 (100 € en 1 año dan 8 € de interés) I 50000 5 (50000 € producirán I € durante 5 años) De aquí se deduce la fórmula general del Interés: Si el tiempo viniera dado en meses, Si el tiempo viniera expresado en días, (Hoy día, con los ordenadores, los bancos ponen como denominador 36500, porque los años tienen 365 días y no 360, como se hacía antes quizás para facilitar los cálculos; incluso, si el año es bisiesto, ponen como denominador 36600). Repartos directamente proporcionales: Hacer un reparto directamente proporcional consiste en repartir algo en proporción directa a unas cantidades determinadas. Por ejemplo: repartir proporcionalmente 3000 € entre dos personas, A y B, según los días que hayan trabajado. Lo resolvemos por reducción a la unidad: - A ha trabajado 6 días y B, 4 días - Días trabajados: 6 + 4 = 10 - Lo que se reparte: 3000 € - Lo que corresponde a una parte (un día): 3000 : 10 = 300 € - Lo que corresponde a A (6 días): 300 • 6 = 1800 € - Lo que corresponde a B (4 días): 300 • 4 = 1200 € [Resolución de los repartos proporcionales por proporciones: Se forma una proporción entre lo que corresponde a cada perceptor (x, y, z...) y las partes (nº de días, años, etc.) que cada uno acredite. Así, en el ejemplo anterior tendríamos: . Lo que corresponde a A: x . Lo que corresponde a B: y . Partes (días) que acredita A: a (a = 6) . Partes (días) que acredita B: b (b = 4) . Suma de lo que corresponde a cada uno: x + y = 30000 . Suma de las partes (días) que acredita cada uno: a + b = 10 . Proporción: De aquí operamos con la proporción formada por la segunda y tercera razón: Para calcular x podemos hacerlo de dos maneras: la más fácil es restar 30000 – 12000 = 18000 €. La segunda manera es formar una proporción con la primera y segunda razón o con la primera y la tercera razón, llegando en ambos casos a que x = 18000 €]. PREGUNTAS INGENIOSAS PARA ALUMNOS INTELIGENTES Proporción: es la igualdad de dos razones. El 6 y el 2 se llaman extremos y el 3 y el 4, medios. Pregunta: ¿Por qué crees tú que al 6 y al 2 se les llama extremos y al 3 y al 4, medios? En un examen de Matemáticas el profesor les pone a sus alumnos la siguiente cuestión: Calcula el medio proporcional de esta proporción continua: = Laura, una de las mejores alumnas de la clase, ha dado la siguiente respuesta: x = 6. Cuando el profesor les entrega el examen corregido, ella observa que en esta pregunta le ha puesto un 0,75 en lugar de 1, como ella esperaba. Como no está conforme ha ido a preguntárselo al profesor y éste le ha dicho que no es que esté mal, pero... Pregunta: ¿Por qué el profesor no le ha puesto un punto en esta pregunta y se lo ha dejado en 0,75? Pregunta: Decimos que el medio proporcional es el término igual de una proporción continua. Si una proporción continua es aquélla que tiene los medios o los extremos iguales, ¿por qué nada más que hablamos de medio proporcional y no de extremo proporcional? (Pista: piensa en alguna de las muchas propiedades de las proporciones). Regla de tres inversa: En el libro de texto de 2º de la ESO de la Editorial Bruño proponen varios problemas geométricos que se resuelven por regla de tres inversa. Ejemplo: “El tablero de una mesa mide 120 cm de largo por 80 cm de ancho. Si se desea una mesa de 150 cm de largo y con la misma superficie, ¿cuánto debe medir de ancho?” Este problema se puede resolver con una regla de tres inversa, ya que si queremos mantener la misma superficie, al aumentar el largo tendrá que disminuir el ancho. Un año que les puse este problema a mis alumnos todavía no habíamos visto la regla de tres inversa, pero sí las ecuaciones. Una alumna me dijo que ella lo había resuelto empleando una ecuación. Pregunta: ¿Cómo lo hizo? Aumentos y disminuciones porcentuales con calculadora: Para calcular con calculadora cuánto me costará algo que ha subido o disminuido, por ejemplo, un 8 % se multiplica la cantidad inicial por 1,08 (1 + 0,08), si ha aumentado, o por 0,92 (1 – 0,08) si ha disminuido. Ejemplo: Un señor cobra 1300 € mensuales y le han subido un 8 %. ¿Cuánto cobrará ahora? 1300 • 1,08 = 1404 € Ejemplo: Un vestido de 350 € lo han rebajado un 8 %. ¿Cuánto cuesta ahora? 350 • 0,92 = 322 € Pregunta: ¿Sabrías explicar por qué para hallar la cantidad final en un aumento porcentual basta con multiplicar por 1 más la centésima parte del porcentaje? (Pista: prueba a calcular los aumentos y disminuciones porcentuales como una regla de tres). Los problemas de porcentajes, de cualquier tipo, se pueden resolver perfectamente por ecuaciones, una vez que los alumnos saben operar con ecuaciones. De esta forma no es necesario colocarlos como una regla de tres. Por ejemplo: Los 18 alumnos que han aprobado el examen de Matemáticas representan el 60 % del total. ¿Cuántos alumnos hay en la clase? Pregunta: ¿Sabrías resolver el problema empleando ecuaciones? Pregunta: ¿Cuántos años han de pasar para que un capital invertido al 2 % sea igual a 5 veces el interés que haya producido? Pregunta: ¿Cuántos años han de pasar para que un capital invertido al 2 % sea igual al interés que haya producido? De vez en cuando salen ofertas en los supermercados como éstas: “3 x 2” (Llévese tres y pague dos). “Segunda unidad a mitad de precio” (comprando dos productos iguales, uno de ellos te cuesta la mitad). “Descuento del 70 % en la segunda unidad” (comprando dos productos iguales, te descuentan el 70 % en la segunda unidad). Pregunta: Clasifica estas ofertas por orden de mayor a menor beneficio para el cliente.